Revista Eletrônica Paulista de Matemática

ISSN 2316-9664
v. 27, 2026
Artigo de Pesquisa

Francisco José dos Santos Nascimento
Universidade Federal do Vale do São Francisco (UNIVASF), Colegiado de Geologia, Senhor do Bonfim, francisco.jsn@univasf.edu.br

Conjugação analítica entre sistemas reversíveis e hamiltonianos no plano

Analytic conjugacy between reversible and hamiltonian systems in the plane

Resumo

Este artigo investiga se campos vetoriais analíticos planares reversíveis em torno de um ponto de equilíbrio não degenerado podem ser descritos localmente por sistemas Hamiltonianos analíticos. Provamos que todo campo vetorial analítico planar reversível em relação à involução linear $R(x, y) = (x, -y)$ e com ponto de equilíbrio não degenerado é localmente analiticamente conjugado a um sistema Hamiltoniano planar. Esse resultado promove ao contexto analítico uma equivalência anteriormente conhecida apenas em nível formal.

Palavras-chave: sistemas reversíveis; sistemas Hamiltonianos; formas normais; conjugação analítica.

Abstract

This paper investigates whether planar analytic reversible vector fields in a neighborhood of a nondegenerate equilibrium point can be locally described by analytic Hamiltonian systems. We prove that every planar analytic vector field reversible with respect to the linear involution $R(x, y) = (x, -y)$ and possessing a nondegenerate equilibrium point is locally analytically conjugate to a planar Hamiltonian system. This result promotes to the analytic setting an equivalence that was previously known only at the formal level.

Keywords: reversible systems; hamiltonian systems; normal forms; analytic conjugacy.

Artigo recebido em nov. 2025 e aceito em jun. 2026

Este artigo está licenciado com uma Licença Creative Commons Attribution 4.0 International, podendo ser usado, distribuído e reproduzido, sem restrições, desde que o trabalho original seja devidamente citado.

1 Introdução

Sistemas dinâmicos reversíveis e sistemas Hamiltonianos desempenham papel fundamental na teoria qualitativa das equações diferenciais e da dinâmica clássica [1, 2, 3, 4]. Ambas as classes surgem naturalmente em diversos problemas provenientes da Mecânica, Mecânica Celeste e Física Matemática, nos quais estruturas de simetria exercem influência decisiva sobre o comportamento qualitativo das soluções.

Um sistema diferencial é dito reversível quando sua dinâmica é invariável sob uma reversão temporal apropriada. Mais precisamente, se $\varphi(t)$ é uma solução do sistema, então a curva $\varphi(x(-t))$ também é solução para uma involução adequada R. Essa propriedade impõe fortes restrições ao retrato de fase e frequentemente produz estruturas dinâmicas semelhantes às observadas em sistemas Hamiltonianos [3, 5, 4, 6].

A proximidade entre os mundos reversível e Hamiltoniano vem sendo observada desde os trabalhos de Poincaré e Birkhoff e foi posteriormente consolidada por Devaney no contexto moderno da teoria dos sistemas reversíveis [3]. Diversos resultados clássicos originalmente obtidos para sistemas Hamiltonianos, como versões do Teorema do Centro de Lyapunov e resultados do tipo KAM, admitem análogos em contextos reversíveis [1, 5, 4, 6, 7, 8]. Como observado por Lamb e Roberts [4], sistemas reversíveis próximos de órbitas periódicas simétricas frequentemente exibem comportamento qualitativo muito semelhante ao Hamiltoniano.

Entretanto, apesar dessas profundas conexões, sistemas Hamiltonianos e reversíveis constituem classes distintas de sistemas dinâmicos e apresentam diferenças significativas do ponto de vista geométrico e dinâmico [4, 9]. Isso conduz naturalmente à seguinte questão: até que ponto sistemas reversíveis podem ser descritos localmente por estruturas Hamiltonianas?

No contexto local, essa questão tem sido investigada por meio da teoria de formas normais; ver, por exemplo, [10, 11, 12] e as referências ali contidas. Nesses trabalhos, os autores obtiveram resultados de equivalência formal entre sistemas reversíveis e Hamiltonianos para importantes classes de campos vetoriais reversíveis. Em particular, o resultado principal de [11] estabelece que todo campo vetorial planar reversível em relação à involução $R(x, y) = (x, -y)$ é formalmente conjugado, em uma vizinhança de um ponto de equilíbrio não degenerado, a um sistema Hamiltoniano planar.

O principal objetivo deste trabalho é mostrar que, no caso planar analítico, a equivalência formal obtida em [11] pode ser promovida a uma equivalência analítica local. Mais precisamente, provamos que todo campo vetorial analítico planar reversível em relação à involução

$$R(x, y) = (x, -y)$$

é localmente analiticamente conjugado, em uma vizinhança de um ponto de equilíbrio não degenerado, a um sistema Hamiltoniano planar. Em particular, o resultado permite descrever a dinâmica local de sistemas reversíveis por meio da teoria de sistemas Hamiltonianos.

Nossa abordagem combina técnicas de formas normais de Poincaré–Dulac, teoria de sistemas reversíveis e argumentos de convergência baseados no método dos majorantes de Cauchy.

O artigo está organizado da seguinte forma. Na Seção 2 apresentamos os conceitos e resultados preliminares sobre sistemas reversíveis, sistemas Hamiltonianos, equivalência de campos vetoriais e teoria de formas normais que serão utilizados ao longo do texto. Na Seção 3 enunciamos o resultado principal, apresentamos sua demonstração e uma aplicação. Por fim, na Seção 4 apresentamos algumas considerações finais e perspectivas para trabalhos futuros.

2 Preliminares

Nesta seção apresentamos alguns conceitos e resultados que serão utilizados ao longo do trabalho. Para uma exposição mais detalhada sobre sistemas diferenciais planares, ver [13].

Seja Ω um subconjunto aberto de $\mathbb{R}^2$ e denote por $C^r(\Omega, \mathbb{R}^n)$ o conjunto das aplicações de classe C^r definidas em Ω com valores em $\mathbb{R}^n$, onde $n \in \{1, 2\}$ e $r \in \{1, 2, \ldots, \infty, \omega\}$, sendo ω utilizado para denotar a classe das funções analíticas reais.

Sejam $P, Q \in C^r(\Omega, \mathbb{R})$ e considere o sistema diferencial planar

$$\begin{cases} x' = P(x, y), \\ y' = Q(x, y), \end{cases} \qquad (x, y) \in \Omega, \tag{1}$$

O sistema (1) determina em Ω o campo vetorial planar $X = (P, Q) \in C^r(\Omega, \mathbb{R}^2)$, o qual também pode ser representado na forma

$$X = P(x, y)\frac{\partial}{\partial x} + Q(x, y)\frac{\partial}{\partial y}.$$

Sob essas hipóteses de regularidade, o sistema diferencial (1) admite existência e unicidade local de soluções para condições iniciais dadas. Uma solução de (1) é uma curva diferenciável $\varphi : I \to \Omega$, onde $I \subset \mathbb{R}$ é um intervalo aberto, tal que

$$\varphi'(t) = X(\varphi(t)), \qquad t \in I.$$

Geometricamente, as soluções correspondem às curvas integrais do campo vetorial X. O conjunto dessas trajetórias orientadas descreve a dinâmica do sistema e determina o chamado retrato de fase associado ao campo vetorial.

Em geral, a determinação explícita das soluções de um sistema diferencial é uma tarefa difícil e, na maioria dos casos, impossível de ser realizada por meio de funções elementares ou formas fechadas conhecidas. Por essa razão, a Teoria Qualitativa das Equações Diferenciais busca obter informações relevantes sobre a dinâmica do sistema sem determinar explicitamente suas soluções.

Nessa abordagem, procura-se compreender inicialmente o comportamento local das trajetórias do sistema. Nesse contexto, destacam-se os *pontos de equilíbrio*, isto é, os pontos $p \in \Omega$ tais que $X(p) = 0$, e as *órbitas periódicas*, definidas como imagens de soluções periódicas de X. Esses objetos desempenham papel fundamental na descrição da estrutura local do retrato de fase e do comportamento qualitativo das soluções.

Em dimensão dois, a parte linear do sistema, representada pela matriz $DX(p)$, fornece informações importantes sobre a dinâmica local nas vizinhanças de um ponto de equilíbrio p. Em particular, equilíbrios podem ser classificados localmente como:

- **nó**, quando os autovalores de $DX(p)$ são reais e possuem o mesmo sinal;
- **foco**, quando os autovalores de $DX(p)$ são complexos não reais com parte real não nula;
- **sela**, quando os autovalores de $DX(p)$ são reais e possuem sinais opostos;
- **centro**, quando existe uma vizinhança perfurada de p preenchida por órbitas periódicas envolvendo o equilíbrio.

Um ponto de equilíbrio p é dito *não degenerado* se $\det DX(p) \neq 0$. Nessa situação, a matriz linear $DX(p)$ é invertível e a dinâmica local do sistema nas proximidades de p é determinada, em primeira aproximação, pela parte linear do campo vetorial.

Neste trabalho, estaremos interessados apenas em equilíbrios não degenerados do tipo centro e sela, os quais surgem naturalmente no contexto de sistemas reversíveis planares.

2.1 Sistemas reversíveis

Nesta subseção, apresentamos alguns conceitos e propriedades básicas da teoria de sistemas diferenciais reversíveis que serão utilizados ao longo do texto. Para um estudo mais aprofundado sobre o tema, remetemos o leitor às referências [1, 3, 14, 15].

Uma *involução* sobre $\mathbb{R}^2$ é um difeomorfismo $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tal que $\varphi \circ \varphi = Id$. Um campo vetorial $X \in C^r(\Omega, \mathbb{R}^2)$ é dito reversível em relação a φ, ou φ-reversível em Ω, se

$$D\varphi(\xi)X(\xi) = -X \circ \varphi(\xi), \qquad \forall\, \xi := (x, y) \in \Omega. \tag{2}$$

Nesse caso, o sistema diferencial associado ao campo vetorial X é dito reversível em relação à involução φ.

Neste trabalho, estaremos interessados apenas em sistemas reversíveis em relação a involuções lineares. Nesse contexto, temos a seguinte definição.

Uma *aplicação linear* $R : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ é chamada de *involução linear* se $R^2 = Id$. Um campo vetorial $X \in C^r(\Omega, \mathbb{R}^2)$ é dito *reversível* em relação a R, ou simplesmente R-reversível em Ω, se

$$R \circ X(\xi) = -X \circ R(\xi), \qquad \forall\, \xi := (x, y) \in \Omega. \tag{3}$$

A condição (3) implica que, se $\varphi(t) = (x(t), y(t))$ é uma solução do sistema associado a X, então a curva $R(\varphi(-t))$ também é solução. Em outras palavras, a involução reversora transforma trajetórias do sistema em trajetórias percorridas no sentido oposto do tempo.

Geometricamente, o retrato de fase de X apresenta uma simetria reversora em relação ao conjunto dos pontos fixos da involução R,

$$\mathrm{Fix}(R) = \{\xi \in \mathbb{R}^2;\ R(\xi) = \xi\}.$$

Um ponto de equilíbrio p é dito *simétrico* quando $R(p) = p$, isto é, quando $p \in \mathrm{Fix}(R)$. Analogamente, uma órbita γ de X é dita *simétrica* quando $R(\gamma) = \gamma$.

Seja $X \in C^r(\Omega, \mathbb{R}^2)$ um campo vetorial R-reversível e seja $\mathrm{Fix}(R)$ o conjunto dos pontos fixos da involução R. Destacamos, a seguir, algumas propriedades clássicas do sistema reversível associado a X.

(i) Um ponto de equilíbrio simétrico ou uma órbita periódica simétrica não pode ser atrator nem repulsor;

(ii) Se $X(p) = 0$ e $p \notin \mathrm{Fix}(R)$, então $X(R(p)) = 0$;

(iii) Se uma órbita regular intercepta $\mathrm{Fix}(R)$ em dois pontos distintos, então ela é uma órbita periódica simétrica;

(iv) Se γ é uma órbita periódica que não intercepta $\mathrm{Fix}(R)$, então $R(\gamma)$ também é uma órbita periódica;

(v) O retrato de fase de X é simétrico em relação a $\mathrm{Fix}(R)$.

Neste trabalho, estamos interessados em sistemas diferenciais planares reversíveis em relação à involução linear

$$R(x, y) = (x, -y).$$

Geometricamente, essa transformação preserva a coordenada x e inverte o sinal da coordenada y, correspondendo à reversão do sentido da velocidade na direção vertical. Em particular, o conjunto de pontos fixos de R é dado pelo eixo x, isto é,

$$\mathrm{Fix}(R) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2;\ y = 0\}.$$

Um exemplo de sistema reversível em relação à involução R é dado por

$$\begin{cases} x' = y, \\ y' = -x(b - ay^2), \end{cases} \qquad a, b \in \mathbb{R}. \tag{4}$$

De fato, considerando

$$X(x, y) = \big(y, -x(b - ay^2)\big)$$

o campo vetorial associado ao sistema (4), temos

$$X(x, -y) = \big(-y, -x(b - ay^2)\big).$$

Como

$$R(x, y) = (x, -y),$$

segue que

$$R\big(X(x, y)\big) = \big(y, x(b - ay^2)\big),$$

ao passo que

$$-X\big(R(x, y)\big) = -X(x, -y) = \big(y, x(b - ay^2)\big).$$

Portanto,

$$R \circ X(x, y) = -X \circ R(x, y),$$

mostrando que o sistema (4) é R-reversível.

De maneira mais geral, um campo vetorial planar

$$X(x, y) = (P(x, y), Q(x, y))$$

é reversível em relação à involução

$$R(x, y) = (x, -y)$$

se, e somente se,

$$P(x, -y) = -P(x, y) \qquad \text{e} \qquad Q(x, -y) = Q(x, y).$$

Em outras palavras, a primeira componente do campo deve ser ímpar em relação à variável y, enquanto a segunda deve ser par em y.

2.2 Sistemas hamiltonianos

Nesta subseção, apresentamos brevemente alguns conceitos básicos da teoria de sistemas Hamiltonianos planares que serão utilizados ao longo do texto. Para mais detalhes, ver [13, 16, 17].

Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ um conjunto aberto. Um sistema diferencial planar de classe C^r em Ω, com $r \in \{1, \ldots, \infty, \omega\}$, é chamado *Hamiltoniano* se existe uma função $H \in C^{r+1}(\Omega, \mathbb{R})$ tal que

$$\dot{x} = \frac{\partial H}{\partial y}(x, y), \qquad \dot{y} = -\frac{\partial H}{\partial x}(x, y).$$

A função H é denominada *Hamiltoniana* do sistema, e o campo vetorial associado é dado por

$$X_H(x, y) = \left(\frac{\partial H}{\partial y}(x, y), -\frac{\partial H}{\partial x}(x, y)\right).$$

Uma propriedade fundamental dos sistemas Hamiltonianos é que a Hamiltoniana é conservada ao longo das trajetórias, visto que, se

$$\varphi(t) = (x(t), y(t))$$

é uma solução do sistema Hamiltoniano, então

$$\frac{d}{dt}H(\varphi(t)) = \nabla H(\varphi(t)) \cdot X_H(\varphi(t)) = 0.$$

Consequentemente, as órbitas do sistema permanecem contidas nas curvas de nível da Hamiltoniana

$$H(x, y) = c, \qquad c \in \mathbb{R},$$

de modo que o retrato de fase do sistema é essencialmente determinado pela geometria desses conjuntos de nível.

Assim, grande parte das propriedades dinâmicas do sistema pode ser obtida diretamente a partir da análise geométrica da Hamiltoniana H, como mostram as propriedades a seguir.

1. a função Hamiltoniana H é uma integral primeira de X_H;
2. as singularidades não degeneradas de X_H são do tipo centro ou sela;
3. mínimos e máximos locais não degenerados de H correspondem a centros de X_H, enquanto pontos de sela não degenerados de H correspondem a selas de X_H;
4. o campo vetorial X_H é tangente às curvas de nível de H;
5. as órbitas de X_H estão contidas nas curvas de nível da Hamiltoniana;
6. o fluxo de X_H preserva área no plano. Equivalentemente, o divergente de X_H é identicamente nulo, isto é,
$$\operatorname{div}(X_H) \equiv 0.$$

A propriedade (6) implica que sistemas Hamiltonianos planares preservam área no espaço de fase e, consequentemente, não possuem equilíbrios do tipo nó ou foco.

Uma classe importante de sistemas Hamiltonianos planares é obtida a partir de sistemas conservativos unidimensionais, descritos pela equação diferencial de segunda ordem

$$\ddot{x} = F(x), \tag{5}$$

onde $F : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ depende apenas da posição x.

Introduzindo a variável $y = \dot{x}$, a equação (5) pode ser escrita como o sistema de primeira ordem

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = F(x), \end{cases} \qquad (x, y) \in I \times \mathbb{R}. \tag{6}$$

A equação (5) representa a segunda lei de Newton para uma partícula de massa $m = 1$ submetida a uma força $F(x)$. Nesse contexto,

$$T(y) = \frac{y^2}{2}$$

é a energia cinética, enquanto

$$V(x) = -\int_{x_0}^{x} F(\xi)\, d\xi$$

é a energia potencial associada à força F. Assim,

$$F(x) = -V'(x),$$

e o sistema (6) assume a forma Hamiltoniana

$$\begin{cases} \dot{x} = \dfrac{\partial H}{\partial y}(x, y), \\ \dot{y} = -\dfrac{\partial H}{\partial x}(x, y), \end{cases}$$

com Hamiltoniana

$$H(x, y) = \frac{y^2}{2} + V(x).$$

Por esse motivo, sistemas da forma (6) são também chamados de *sistemas potenciais*.

Geometricamente, a Hamiltoniana representa a energia total do sistema, dada pela soma entre a energia cinética $\frac{1}{2}y^2$ e a energia potencial $V(x)$.

Essa classe inclui diversos modelos clássicos da Mecânica, como o oscilador harmônico

$$x'' + x = 0,$$

o pêndulo simples

$$x'' + \sin x = 0,$$

e o oscilador de Duffing

$$x'' + ax + bx^3 = 0.$$

2.3 Equivalência de Campos Vetoriais

Nesta seção introduzimos o conceito de equivalência entre campos vetoriais planares, bem como alguns resultados preliminares sobre mudanças de coordenadas e formas normais. Essas ferramentas desempenham papel central na demonstração do resultado principal deste trabalho.

O objetivo central é comparar sistemas diferenciais através de transformações que preservem sua dinâmica qualitativa, simplificando a estrutura do campo vetorial sem alterar as propriedades essenciais do sistema.

A fim de ilustrar a ideia de equivalência entre campos vetoriais, sejam $\Omega_1 \subseteq \mathbb{R}^2$ um aberto, $X_1 \in C^r(\Omega_1, \mathbb{R}^2)$ um campo vetorial e

$$h : \Omega_1 \to \Omega_2 := h(\Omega_1)$$

um difeomorfismo de classe C^r. Seja

$$\xi(t) = (x(t), y(t))$$

uma solução da equação diferencial associada a X_1, isto é,

$$\dot{\xi} = X_1(\xi).$$

Associamos à trajetória $\xi(t)$ a curva

$$\eta(t) = h(\xi(t)).$$

Pela regra da cadeia,

$$\dot{\eta}(t) = Dh(\xi(t))\dot{\xi}(t) = Dh(\xi(t))X_1(\xi(t)).$$

Como

$$\xi(t) = h^{-1}(\eta(t)),$$

segue que

$$\dot{\eta}(t) = Dh(h^{-1}(\eta(t)))X_1(h^{-1}(\eta(t))).$$

Portanto, a curva $\eta(t)$ é solução do sistema diferencial

$$\dot{\eta} = X_2(\eta),$$

onde o campo vetorial X_2 é definido por

$$X_2(\eta) = Dh(h^{-1}(\eta))X_1(h^{-1}(\eta)), \qquad \eta \in \Omega_2.$$

O campo vetorial X_2 é chamado *pushforward* de X_1 pelo difeomorfismo h, sendo denotado por

$$X_2 = h_* X_1.$$

Geometricamente, isso significa que o difeomorfismo h transporta trajetórias do sistema associado a X_1 em trajetórias do sistema associado a X_2, preservando a estrutura dinâmica do retrato de fase.

De modo geral, sejam $\Omega_i \subseteq \mathbb{R}^2$, $i \in \{1, 2\}$, abertos, e $X_i \in C^r(\Omega_i, \mathbb{R}^2)$. Dizemos que os campos vetoriais X_1 e X_2 são C^r*-equivalentes* se existe um difeomorfismo $h : \Omega_1 \to \Omega_2$ de classe C^r tal que

$$Dh(x)\, X_1(x) = X_2(h(x)), \qquad \forall\, x \in \Omega_1.$$

Equivalentemente,

$$X_2(y) = Dh(h^{-1}(y))X_1(h^{-1}(y)) = (h_*X_1)(y), \qquad \forall\, y \in \Omega_2.$$

Nesse caso, o difeomorfismo h transforma trajetórias do sistema associado a X_1 em trajetórias do sistema associado a X_2, preservando a dinâmica qualitativa dos sistemas, como pontos singulares e órbitas periódicas.

No contexto deste trabalho, estaremos interessados em determinar condições sob as quais sistemas reversíveis sejam localmente conjugados a sistemas Hamiltonianos por meio de um difeomorfismo adequado.

Mais precisamente, nosso interesse recairá sobre equivalências locais em torno de pontos singulares, os quais, sem perda de generalidade, assumiremos localizados na origem.

Para o estudo local de campos vetoriais nas vizinhanças de singularidades, uma ferramenta fundamental é a teoria de formas normais, cujo objetivo consiste em simplificar a expressão do sistema por meio de mudanças sucessivas de coordenadas, preservando sua dinâmica essencial.

2.4 Formas Normais

A teoria das formas normais busca simplificar localmente a expressão de um campo vetorial através de mudanças de coordenadas próximas da identidade. Mais precisamente, dado um campo vetorial X, procura-se uma transformação que o conjugue a um novo campo vetorial com expressão mais simples, preservando as propriedades qualitativas fundamentais da dinâmica.

No contexto deste trabalho, as formas normais desempenham papel central na demonstração do resultado principal, permitindo reduzir sistemas reversíveis a formas normais Hamiltonianas apropriadas. A exposição apresentada a seguir foi adaptada de [13, 18, 19].

Iniciamos introduzindo algumas definições e notações que serão utilizadas ao longo desta subseção.

Daqui em diante, a notação

$$\phi : (\mathbb{R}^2, 0) \to (\mathbb{R}^2, 0)$$

indicará que ϕ é uma aplicação definida em uma vizinhança da origem em $\mathbb{R}^2$, com valores em $\mathbb{R}^2$, satisfazendo $\phi(0) = 0$.

Um *polinômio homogêneo* de grau k em $\mathbb{R}^2$ é uma expressão da forma

$$\phi^k(x) = \sum_{|q|=k} a_q x^q,$$

onde

$$x = (x_1, x_2), \quad x^q = x_1^{q_1} x_2^{q_2}, \quad |q| = q_1 + q_2 = k \in \mathbb{N} \cup \{0\}, \quad a_q \in \mathbb{R}.$$

Denotaremos por H_2^k o espaço dos campos vetoriais polinomiais homogêneos de grau k em $\mathbb{R}^2$.

Uma *aplicação formal*

$$\phi : (\mathbb{R}^2, 0) \to (\mathbb{R}^2, 0)$$

é uma série formal da forma

$$\phi(x) = \sum_{k \geq 0} \phi^k(x), \qquad \phi^k \in H_2^k,$$

não necessariamente convergente.

Seja agora

$$X : (\mathbb{R}^2, 0) \to (\mathbb{R}^2, 0)$$

um campo vetorial de classe C^r, com $r \in \{\infty, \omega\}$, e considere sua expansão de Taylor em torno da origem:

$$X(x) = Ax + X^2(x) + X^3(x) + \cdots + X^k(x) + o(|x|^{k+1}), \qquad X^j \in H_2^j, \quad 2 \leq j \leq k, \tag{7}$$

onde $A = DX(0)$ é a parte linear de X e $o(|x|^{k+1})$ denota termos de ordem estritamente superior a k.

Considere também uma mudança formal de coordenadas da forma

$$x = h(y) = y + \sum_{k \geq 2} h^k(y), \qquad h^k \in H_2^k. \tag{8}$$

Tal transformação induz um novo campo vetorial formal $Y = h_* X$, cuja expansão é dada por

$$Y(y) = Ay + Y^2(y) + Y^3(y) + \cdots + Y^k(y) + o(|y|^{k+1}) \quad Y^j \in H_2^j, \quad 2 \leq j \leq k. \tag{9}$$

Definição 1 *Os campos vetoriais formais* (7) *e* (9) *são ditos formalmente conjugados se existe uma transformação formal h da forma* (8) *satisfazendo*

$$Y = h_* X.$$

Além disso, se X, Y e h forem analíticos, então dizemos que X e Y são analiticamente conjugados.

O objetivo da teoria das formas normais é simplificar a expressão do campo vetorial (7), eliminando, sempre que possível, termos não essenciais por meio de mudanças de coordenadas próximas da identidade. O procedimento é realizado iterativamente, começando pelos termos homogêneos de menor ordem.

Consideremos inicialmente uma mudança de coordenadas da forma

$$x = y + h^2(y), \qquad h^2 \in H_2^2,$$

onde h^2 será determinada posteriormente. Derivando em relação ao tempo, obtemos

$$\dot{x} = \big(Id + Dh^2(y)\big)\dot{y}.$$

Como $Dh^2(0) = 0$, segue que $Id + Dh^2(y)$ é invertível para y suficientemente próximo da origem. Portanto,

$$\dot{y} = \big(Id + Dh^2(y)\big)^{-1}\dot{x}.$$

Substituindo $x = y + h^2(y)$ na expansão de X, obtemos

$$\dot{y} = \big(Id + Dh^2(y)\big)^{-1}\Big(A(y + h^2(y)) + X^2(y + h^2(y))\Big) + O(|y|^3).$$

Retendo apenas os termos até ordem dois, segue que

$$\dot{y} = Ay - \Big(Dh^2(y)Ay - Ah^2(y)\Big) + X^2(y) + O(|y|^3).$$

Isso motiva a introdução do operador linear $L_A^{(2)} : H_2^2 \longrightarrow H_2^2$, definido por

$$\left(L_A^{(2)} h^2\right)(y) := Dh^2(y)Ay - Ah^2(y). \tag{10}$$

Assim, se $X^2 \in \mathrm{Im}(L_A^{(2)})$, podemos escolher $h^2 \in H_2^2$ tal que

$$L_A^{(2)} h^2 = X^2,$$

eliminando completamente os termos quadráticos do sistema. Nesse caso, o novo campo vetorial assume a forma

$$Y(y) = Ay + O(|y|^3).$$

O mesmo procedimento pode ser repetido para os termos homogêneos de ordem $k \geq 3$. A possibilidade de eliminar os termos de ordem k depende da invertibilidade de um operador linear associado à parte linear A, chamado operador homológico. Tal invertibilidade está diretamente relacionada às relações de ressonância entre os autovalores de A.

Para $k \geq 2$, o operador linear $L_A^{(k)} : H_2^k \to H_2^k$ definido por

$$\left(L_A^{(k)} h^k\right)(y) := Dh^k(y)Ay - Ah^k(y) \tag{11}$$

é chamado *operador homológico* associado à matriz A.

Sejam $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2)$ os autovalores da matriz $A = DX(0)$. Dizemos que A é *ressonante* se existirem

$$q = (q_1, q_2) \in \mathbb{N}^2 \quad \text{e} \quad j \in \{1, 2\}$$

tais que

$$\lambda_j = \langle q, \lambda \rangle, \qquad |q| = q_1 + q_2 \geq 2,$$

onde

$$\langle q, \lambda \rangle = q_1\lambda_1 + q_2\lambda_2.$$

Nesse caso, dizemos que a ressonância possui ordem $|q|$. Caso contrário, A é dita *não ressonante*.

Um monômio

$$a_q x^q \frac{\partial}{\partial x_j}$$

é dito *ressonante* se

$$\lambda_j = \langle q, \lambda \rangle.$$

Suponha que $A = DX(0, 0)$ seja diagonal, isto é,

$$A = \mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2).$$

Então o operador homológico

$$L_A^{(k)} : H_2^k \to H_2^k$$

é diagonal na base

$$x^q \frac{\partial}{\partial x_j}, \qquad j = 1, 2,$$

e satisfaz

$$L_A^{(k)}\left(x^q\frac{\partial}{\partial x_j}\right)=\big(\langle q,\lambda\rangle-\lambda_j\big)x^q\frac{\partial}{\partial x_j}, \tag{12}$$

onde

$$\lambda=(\lambda_1,\lambda_2),\qquad \langle q,\lambda\rangle=q_1\lambda_1+q_2\lambda_2.$$

Assim, se a matriz A é não ressonante, então

$$\langle q,\lambda\rangle-\lambda_j\neq 0,\qquad j=1,2,$$

para todo multiíndice q com $|q|=k\geq 2$. Consequentemente, o operador homológico $L_A^{(k)}$ é invertível para todo $k\geq 2$. Portanto, todos os termos não lineares podem ser eliminados formalmente por mudanças sucessivas de coordenadas, obtendo-se a forma normal linear

$$\dot{y}=Ay.$$

Mesmo nos casos ressonantes, ainda é possível eliminar todos os monômios não ressonantes por meio de mudanças formais de coordenadas. Esse resultado é conhecido como teorema de Poincaré–Dulac; veja, por exemplo, [18].

Teorema 1 (Poincaré–Dulac) *Seja $X:(\mathbb{R}^2,0)\to(\mathbb{R}^2,0)$ um campo vetorial de classe C^r, com $r\in\{\infty,\omega\}$, tal que $A=DX(0)$ é ressonante. Então existe uma mudança formal de coordenadas*

$$x=y+h(y)$$

que transforma X em um sistema da forma

$$Y(y)=Ay+G(y),$$

onde todos os monômios presentes em G são ressonantes.

No caso de centros não degenerados, a dinâmica local possui uma estrutura particularmente rígida. O próximo resultado corresponde a uma formulação moderna do teorema de Poincaré–Lyapunov, veja, por exemplo, o Teorema 3.1 de [20].

Teorema 2 (Poincaré–Lyapunov) *Seja $X:(\mathbb{R}^2,0)\to(\mathbb{R}^2,0)$ um campo vetorial de classe C^ω. Então a origem é um centro não degenerado se, e somente se, existe uma mudança analítica de coordenadas*

$$(u,v)=(x,y)+h(x,y)$$

definida em uma vizinhança da origem tal que

$$Y=y\big(1+g(x^2+y^2)\big)\frac{\partial}{\partial x}-x\big(1+g(x^2+y^2)\big)\frac{\partial}{\partial y},$$

onde g é analítica em uma vizinhança da origem e satisfaz $g(0)=0$.

3 Resultado Principal

Os resultados apresentados nas seções anteriores fornecem o contexto necessário para o enunciado do principal resultado deste trabalho.

Teorema 3 *Seja* $X : (\mathbb{R}^2, 0) \to (\mathbb{R}^2, 0)$ *um campo vetorial analítico tal que* $\det DX(0) = d \neq 0$, *e suponha que* X *seja reversível em relação à involução* $R(u, v) = (u, -v)$. *Então existe um difeomorfismo analítico local* $h : (\mathbb{R}^2, 0) \to (\mathbb{R}^2, 0)$, *que comuta com* R, *isto é,* $h \circ R = R \circ h$, *tal que*

$$(h_* X)(x, y) = X_H(x, y),$$

onde X_H *é o campo Hamiltoniano analítico associado à Hamiltoniana*

$$H(x, y) = \begin{cases} F(x^2 + y^2), & d > 0 \quad (\textit{caso centro}), \\ F(y^2 - x^2), & d < 0 \quad (\textit{caso sela}), \end{cases}$$

em que

$$F(t) = \frac{1}{2} \int_0^t G(s)\, ds,$$

e G *é uma função real-analítica definida numa vizinhança da origem, satisfazendo* $G(0) \neq 0$.

Em suma, o teorema garante que todo campo vetorial analítico X, com equilíbrio não degenerado e reversível em relação à involução R, é analiticamente conjugado, em uma vizinhança do equilíbrio, a um campo vetorial Hamiltoniano cuja forma normal possui uma estrutura particularmente simples. Além disso, o teorema assegura que o difeomorfismo responsável pela conjugação pode ser escolhido de modo a comutar com a involução reversora.

A conjugação formal entre sistemas reversíveis e Hamiltonianos já havia sido estabelecida em [11], como consequência de resultados mais gerais de equivalência formal. O aspecto novo do Teorema 3 é mostrar que, no contexto planar analítico, essa conjugação formal é de fato convergente. Dessa forma, obtém-se uma equivalência analítica local entre as duas classes de sistemas, permitindo transferir propriedades dinâmicas e geométricas por meio de mudanças de coordenadas analíticas.

3.1 Demonstração do Teorema

A demonstração do Teorema 3 será dividida em dois casos, o caso centro ($d > 0$) e o caso sela ($d < 0$), correspondentes aos possíveis tipos de singularidades não degeneradas compatíveis com a reversibilidade em relação à involução

$$R(u, v) = (u, -v).$$

Antes disso, estabelecemos um resultado preliminar descrevendo a estrutura da parte linear de um campo vetorial reversível. Esse resultado será fundamental para a construção das formas normais utilizadas posteriormente.

Lema 1 *Seja* $X(u, v)$ *um campo vetorial analítico definido em uma vizinhança de* $(0, 0)$, *satisfazendo* $X(0, 0) = (0, 0)$ *e* $d = \det DX(0, 0) \neq 0$. *Suponha ainda que* X *seja reversível em relação à involução*

$$R(u, v) = (u, -v).$$

Então a matriz jacobiana $A := DX(0,0)$ tem necessariamente a forma

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \beta \\ \gamma & 0 \end{pmatrix}, \qquad \beta\gamma \neq 0. \tag{13}$$

Além disso:

- *se $\beta\gamma < 0$, a origem é um centro não degenerado;*
- *se $\beta\gamma > 0$, a origem é uma sela não degenerada.*

Demonstração.
A condição de reversibilidade

$$DR(u,v)\, X(u,v) = -X\big(R(u,v)\big) \tag{14}$$

vale para todo (u,v) suficientemente próximo da origem.

Avaliando (14) em $(0,0)$ e usando que R é linear, obtemos a relação matricial

$$RA = -AR, \tag{15}$$

onde

$$R = DR(0,0) \qquad \text{e} \qquad A = DX(0,0).$$

No caso considerado,

$$R = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

A relação (15) impõe fortes restrições à estrutura da parte linear do sistema.

Escrevendo

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix},$$

segue de (15) que

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\gamma & -\delta \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \gamma & -\delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\alpha & \beta \\ -\gamma & \delta \end{pmatrix}.$$

Comparando as entradas das matrizes, obtemos

$$\alpha = -\alpha \quad \Longrightarrow \quad \alpha = 0,$$

e

$$-\delta = \delta \quad \Longrightarrow \quad \delta = 0.$$

Portanto,

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \beta \\ \gamma & 0 \end{pmatrix}.$$

Como

$$d = \det A = -\beta\gamma \neq 0,$$

segue que

$$\beta\gamma \neq 0,$$

o que conclui (13).

O polinômio característico de A é dado por

$$p(\lambda) = \lambda^2 - \beta\gamma,$$

de modo que os autovalores de A são

$$\lambda_\pm = \pm\sqrt{\beta\gamma}.$$

Assim,

$$\beta\gamma < 0 \iff \lambda_\pm = \pm i\omega, \qquad \omega > 0, \quad \text{(caso centro)},$$

e

$$\beta\gamma > 0 \iff \lambda_\pm \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, \quad \text{(caso sela)}.$$

Por fim, embora autovalores puramente imaginários não garantam, em geral, que a origem seja um centro, podendo corresponder a um foco, a reversibilidade em relação à involução R impede a ocorrência de espiralamento das órbitas. Consequentemente, no caso $\beta\gamma < 0$, a origem é necessariamente um centro, veja o Teorema 1 em [21].

□

A seguir, dividimos a demonstração do Teorema 3 em dois casos distintos: o caso em que X possui um centro e o caso em que X possui uma sela.

3.1.1 Caso Centro

No caso em que a origem é um centro não degenerado, a conclusão principal decorre diretamente do Teorema de Poincaré–Lyapunov apresentado na seção anterior.

De fato, pelo Teorema 2, todo campo vetorial analítico com um centro não degenerado é analiticamente conjugado, em uma vizinhança da origem, a um sistema da forma

$$Y = y\big(1 + g(x^2 + y^2)\big)\frac{\partial}{\partial x} - x\big(1 + g(x^2 + y^2)\big)\frac{\partial}{\partial y},$$

onde g é analítica e satisfaz $g(0) = 0$. Observemos que o sistema acima é Hamiltoniano. De fato, definindo

$$G(t) = 1 + g(t),$$

temos $G(0) > 0$ e o campo vetorial pode ser escrito na forma

$$X_H(x, y) = \big(\partial_y H(x, y), -\partial_x H(x, y)\big),$$

onde

$$H(x, y) = F(x^2 + y^2),$$

com

$$F(t) = \frac{1}{2}\int_0^t G(s)\, ds.$$

Portanto, todo centro analítico não degenerado é localmente analiticamente conjugado a um sistema Hamiltoniano da forma descrita no enunciado do Teorema 3.

Suponhamos agora que o campo vetorial X seja reversível em relação à involução

$$R(u, v) = (u, -v).$$

Nesse caso, a conjugação analítica acima pode ser escolhida de modo equivariante em relação a R, isto é, existe um difeomorfismo analítico local

$$h : (\mathbb{R}^2, 0) \to (\mathbb{R}^2, 0)$$

tal que

$$Dh(u, v)\, X(u, v) = X_H\big(h(u, v)\big)$$

e

$$h \circ R = R \circ h.$$

Além disso, essa conjugação equivariante pode ser construída de maneira canônica, sem introduzir coeficientes livres nas transformações normalizantes, por meio de um procedimento análogo ao desenvolvido no caso sela apresentado na subseção seguinte.

3.1.2 Caso Sela

Para o caso sela, não conhecemos na literatura um resultado análogo ao Teorema da Forma Normal de Poincaré–Lyapunov para centros não degenerados. Por essa razão, apresentamos a seguir uma demonstração direta da conjugação analítica no caso em que a origem é um ponto de sela.

Lema 2 *Seja $X(u, v)$ um campo vetorial analítico definido em uma vizinhança de $(0, 0)$, satisfazendo*

$$d = \det DX(0, 0) = -\beta\gamma < 0,$$

e suponha que X seja reversível em relação à involução

$$R(u, v) = (u, -v).$$

Então X é analiticamente conjugado, em uma vizinhança da origem, a um campo vetorial Hamiltoniano

$$X_H(x, y) = \big(\partial_y H(x, y), -\partial_x H(x, y)\big),$$

cuja Hamiltoniana possui a forma

$$H(x, y) = F(y^2 - x^2),$$

onde

$$F(t) = \frac{1}{2}\int_0^t G(s)\, ds,$$

e G é uma função real-analítica definida em uma vizinhança de 0, satisfazendo $G(0) < 0$.

Demonstração.

A demonstração segue o esquema clássico da teoria de formas normais analíticas e será dividida em duas etapas.

Na primeira etapa, estabeleceremos uma conjugação formal entre o sistema original e um sistema Hamiltoniano apropriado.

Na segunda etapa, utilizaremos o método dos majorantes de Cauchy para demonstrar a convergência das séries formais obtidas anteriormente.

3.1.3 Conjugação formal

Embora a existência de uma conjugação formal entre sistemas reversíveis planares e Hamiltonianos já seja conhecida [11], apresentamos aqui uma construção explícita dessa conjugação, adaptada ao contexto do presente trabalho e compatível com a involução reversora R.

A construção da conjugação formal baseia-se no Teorema de Poincaré–Dulac e em resultados de Gaeta [22], que garantem a compatibilidade da redução à forma normal com a reversibilidade do sistema.

Uma vez que

$$\det DX(0,0) = -\beta\gamma < 0,$$

podemos, após uma mudança linear de coordenadas, supor

$$\beta = \gamma = 1.$$

Assim, o sistema associado ao campo vetorial X pode ser escrito na forma

$$\begin{cases} \dot{u} = v + P(u,v), \\ \dot{v} = u + Q(u,v), \end{cases} \tag{16}$$

em que P e Q são funções analíticas definidas em uma vizinhança da origem, satisfazendo

$$P(0,0) = Q(0,0) = 0,$$

e

$$DP(0,0) = DQ(0,0) = 0.$$

Além disso, como o sistema é reversível em relação à involução

$$R(u,v) = (u,-v),$$

temos

$$P(u,-v) = -P(u,v), \qquad Q(u,-v) = Q(u,v).$$

A parte linear do sistema (16) é dada por

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

cujos autovalores são

$$\lambda_1 = -1, \qquad \lambda_2 = 1.$$

A matriz A é diagonalizável. De fato, tomando

$$B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix},$$

temos

$$B = C^{-1}AC.$$

A mudança linear de coordenadas

$$(u,v) = C(\xi,\eta)$$

transforma o sistema (16) em

$$\begin{cases} \dot{\xi} = -\xi - f_1(\xi, \eta), \\ \dot{\eta} = \eta + f_2(\xi, \eta), \end{cases} \tag{17}$$

onde

$$f_1(\xi, \eta) = \frac{1}{2}\Big[P(\xi + \eta, -\xi + \eta) - Q(\xi + \eta, -\xi + \eta)\Big],$$

e

$$f_2(\xi, \eta) = \frac{1}{2}\Big[P(\xi + \eta, -\xi + \eta) + Q(\xi + \eta, -\xi + \eta)\Big].$$

Por definição, as funções analíticas f_1 e f_2 satisfazem

$$f_i(0,0) = 0, \qquad Df_i(0,0) = 0, \qquad i = 1, 2.$$

Além disso, o sistema (17) é reversível em relação à involução linear

$$S = C^{-1}RC,$$

isto é,

$$S(\xi, \eta) = (\eta, \xi).$$

Consequentemente,

$$f_2(\xi, \eta) = -f_1(\eta, \xi). \tag{18}$$

Passemos agora à análise das ressonâncias associadas à parte linear

$$B = \operatorname{diag}(-1, 1).$$

As relações de ressonância são dadas por

$$\langle q, \lambda \rangle - \lambda_j = 0,$$

onde

$$q = (q_1, q_2) \in \mathbb{N}^2, \qquad \lambda = (-1, 1).$$

Um cálculo direto mostra que os únicos monômios ressonantes são

$$(\xi\eta)^m \, \xi \, \frac{\partial}{\partial \xi}, \qquad (\xi\eta)^m \, \eta \, \frac{\partial}{\partial \eta}, \qquad m \geq 1.$$

Portanto, pelo Teorema de Poincaré–Dulac (Teorema 1), o sistema (17) é formalmente conjugado a um sistema da forma

$$\begin{cases} \dot{\xi} = -\xi + \displaystyle\sum_{m \geq 1} a_m (\xi\eta)^m \, \xi, \\ \dot{\eta} = \eta + \displaystyle\sum_{m \geq 1} b_m (\xi\eta)^m \, \eta. \end{cases} \tag{19}$$

Observemos que, até este ponto, a reversibilidade ainda não foi utilizada na determinação da forma normal.

Nosso próximo objetivo é determinar as restrições impostas pela reversibilidade aos coeficientes ressonantes da forma normal (19). Para isso, utilizaremos resultados de Gaeta [22], segundo os quais a forma normal de Poincaré–Dulac de um campo S-reversível pode ser obtida por transformações que comutam com a involução S. Em consequência, a forma normal resultante permanece S-reversível.

Começamos pelo seguinte lema.

Lema 3 *Sejam X o campo vetorial associado ao sistema* (17) *e*

$$h(\xi,\eta) = \big(\xi + h_1(\xi,\eta), \eta + h_2(\xi,\eta)\big),$$

um difeomorfismo satisfazendo

$$h \circ S = S \circ h.$$

Então a mudança de coordenadas

$$z \mapsto h(z),$$

onde $z = (\xi,\eta)$, transforma campos S-reversíveis em campos S-reversíveis.

Demonstração.

Este resultado é um caso particular do Lema IV de [22]. Para conveniência do leitor, apresentamos uma demonstração.

Como h comuta com S, temos

$$h \circ S = S \circ h.$$

Derivando ambos os lados e usando a regra da cadeia, obtemos

$$Dh(Sz)\, DS(z) = DS(h(z))\, Dh(z).$$

Como S é linear, segue que

$$Dh(Sz)\, S = S\, Dh(z).$$

Multiplicando à direita por S^{-1}, concluímos que

$$Dh(Sz) = S\, Dh(z)\, S^{-1}. \tag{20}$$

Considere agora a mudança de coordenadas $w = h(z)$. O campo X é transformado no campo

$$\widehat{X}(z) = \big(Dh(z)\big)^{-1} X(h(z)).$$

Mostremos que $\widehat{X}$ continua sendo S-reversível. Usando (20) e a reversibilidade de X, obtemos

$$\begin{aligned}
\widehat{X}(Sz) &= \big(Dh(Sz)\big)^{-1} X\big(h(Sz)\big) \\
&= \big(SDh(z)S^{-1}\big)^{-1} X\big(S(h(z))\big) \\
&= S\big(Dh(z)\big)^{-1} S^{-1} X\big(S(h(z))\big) \\
&= S\big(Dh(z)\big)^{-1} S^{-1} \big(-SX(h(z))\big) \\
&= -S\big(Dh(z)\big)^{-1} X(h(z)) \\
&= -S\widehat{X}(z).
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\widehat{X}(Sz) = -S\widehat{X}(z),$$

isto é, $\widehat{X}$ é S-reversível.

□

A condição $h \circ S = S \circ h$ implica que a parte não linear de h também comuta com S. Escrevendo

$$h(z) = z + \widehat{h}(z),$$

obtemos

$$\widehat{h}(Sz) = S\,\widehat{h}(z).$$

Consequentemente, se

$$\widehat{h} = \sum_{k\geq 2} \widetilde{h}^{\,k},$$

é a decomposição homogênea de $\widehat{h}$, então cada componente homogênea satisfaz

$$\widetilde{h}^{\,k}(Sz) = S\,\widetilde{h}^{\,k}(z), \qquad k \geq 2.$$

Por outro lado, o Teorema principal de Gaeta [22] assegura que a forma normal de Poincaré–Dulac de um campo S-reversível pode ser obtida por meio de uma sequência de transformações homogêneas que comutam com S. Assim, a conjugação formal que leva o sistema (17) à forma normal (19) pode ser construída recursivamente por meio de mudanças de coordenadas da forma

$$h^{(k)}(\xi,\eta) = (\xi,\eta) + \widetilde{h}^{\,k}(\xi,\eta), \qquad k \geq 2,$$

onde $\widetilde{h}^{\,k}$ é homogênea de grau k e satisfaz

$$h^{(k)} \circ S = S \circ h^{(k)}.$$

Pela observação anterior, isso equivale a exigir que

$$\widetilde{h}^{\,k}(Sz) = S\,\widetilde{h}^{\,k}(z).$$

Além disso, pelo Lema 3, cada uma dessas transformações preserva a reversibilidade do sistema. Consequentemente, todas as formas normais intermediárias obtidas durante o procedimento de Poincaré–Dulac permanecem S-reversíveis.

Em particular, a forma normal (19) satisfaz

$$\widehat{X} \circ S = -S \circ \widehat{X}, \qquad S(\xi,\eta) = (\eta,\xi).$$

Substituindo a expressão de $\widehat{X}$ dada por (19) nessa identidade e comparando as duas componentes, obtemos

$$b_m = -a_m, \qquad m \geq 1.$$

Definindo

$$g_m = -a_m,$$

a forma normal pode ser escrita como

$$\begin{cases} \dot{\xi} = -\xi - \displaystyle\sum_{m\geq 1} g_m (\xi\eta)^m\, \xi, \\ \dot{\eta} = \eta + \displaystyle\sum_{m\geq 1} g_m (\xi\eta)^m\, \eta. \end{cases} \tag{21}$$

Definindo agora

$$g(t) = \sum_{m\geq 1} g_m t^m,$$

podemos reescrever (21) como

$$\begin{cases} \dot{\xi} = -\xi - \xi\, g(\xi\eta), \\ \dot{\eta} = \eta + \eta\, g(\xi\eta), \end{cases}$$

com $g(0) = 0$.

Por fim, aplicando a mudança linear

$$(x, y) = C^{-1}(\xi, \eta),$$

obtemos o sistema

$$\widehat{X}(x, y) := \begin{cases} \dot{x} = y\big(-1 - g(y^2 - x^2)\big), \\ \dot{y} = x\big(-1 - g(y^2 - x^2)\big). \end{cases} \tag{22}$$

Definindo

$$G(t) = -1 - g(t),$$

podemos reescrever o sistema acima na forma

$$\begin{cases} \dot{x} = y\, G(y^2 - x^2), \\ \dot{y} = x\, G(y^2 - x^2). \end{cases}$$

Observe que o sistema (22) é Hamiltoniano, com Hamiltoniana dada por

$$H(x, y) = F(y^2 - x^2),$$

onde

$$F(t) = \frac{1}{2}\int_0^t G(s)\, ds.$$

Além disso, o sistema (22) é reversível em relação à involução

$$R(x, y) = (x, -y),$$

pois

$$R = CSC^{-1}.$$

Isso conclui a construção da conjugação formal.

Em resumo, o campo vetorial R-reversível $X(u, v)$ definido pelo sistema (16) é formalmente conjugado ao campo vetorial Hamiltoniano R-reversível $\widehat{X}(x, y)$ definido por (22). Além disso, o difeomorfismo formal

$$(x, y) = \overline{h}(u, v)$$

que conjuga X e $\widehat{X}$ pode ser escolhido de modo equivariante em relação à involução R.

De fato, por construção,

$$\overline{h} = C \circ h \circ C^{-1},$$

onde $h(\xi,\eta)$ é o difeomorfismo formal que conjuga os sistemas (17) e (21). Como

$$h \circ S = S \circ h$$

e

$$CS = RC,$$

segue que

$$\begin{aligned}\overline{h} \circ R &= C \circ h \circ C^{-1} \circ R \\ &= C \circ h \circ S \circ C^{-1} \\ &= C \circ S \circ h \circ C^{-1} \\ &= R \circ C \circ h \circ C^{-1} \\ &= R \circ \overline{h}.\end{aligned}$$

Portanto,

$$\overline{h} \circ R = R \circ \overline{h},$$

isto é, a conjugação formal $\overline{h}$ comuta com a involução reversora R.

3.1.4 Convergência

Observe que, como C e C^{-1} são transformações lineares, a convergência de $\overline{h}(u,v)$ é equivalente à convergência de $h(\xi,\eta)$, isto é, $\overline{h}(u,v)$ converge se, e somente se, $h(\xi,\eta)$ converge, onde $h(\xi,\eta)$ é o difeomorfismo formal que conjuga os sistemas (17) e (21).

Seja

$$h(\xi,\eta) = \big(\xi + h_1(\xi,\eta), \eta + h_2(\xi,\eta)\big), \qquad h_1(0,0) = h_2(0,0) = 0, \tag{23}$$

o difeomorfismo formal que conjuga os sistemas (17) e (21), e seja

$$g(t) = \sum_{m\geq 1} g_m t^m$$

a função formal definida anteriormente.

Nosso objetivo é mostrar que h e g são convergentes em uma vizinhança da origem. Para isso, utilizaremos o método clássico dos *majorantes de Cauchy*, ver, por exemplo, [23, 24].

A ideia consiste em comparar as séries formais obtidas anteriormente com séries de coeficientes positivos e raio de convergência conhecido, chamadas *séries majorantes*. Mais precisamente, construiremos funções analíticas

$$\widehat{g} \quad \text{e} \quad \widehat{h}$$

cujos coeficientes dominam, termo a termo, os coeficientes das séries formais g e h. A convergência dessas séries majorantes implicará a convergência das séries originais.

Como h comuta com S, decorre da condição de equivariância que

$$h_2(\xi,\eta) = h_1(\eta,\xi),$$

de modo que a convergência de h_1 implica a convergência de h_2. Assim, a convergência de h reduz-se à convergência de h_1. Além disso, observemos que os divisores homológicos associados à parte linear

$$B = \operatorname{diag}(-1,1)$$

são inteiros não nulos para todos os monômios não ressonantes. Em particular, não há ocorrência de pequenos divisores no processo de normalização, o que permitirá aplicar o método clássico dos majorantes de Cauchy.

Escrevamos

$$f_1(\xi,\eta)=\sum_{k=2}^{\infty} f_1^k(\xi,\eta) \quad \text{e} \quad h_1(\xi,\eta)=\sum_{k=2}^{\infty} h_1^k(\xi,\eta)$$

como as expansões em séries de Taylor de f_1 e h_1, onde

$$f_1^k(\xi,\eta)=\sum_{j=0}^{k} a_{k-j,j}\,\xi^{k-j}\eta^j,$$

e

$$h_1^k(\xi,\eta)=\sum_{j=0}^{k} b_{k-j,j}\,\xi^{k-j}\eta^j.$$

Aplicando a mudança de variáveis e reorganizando os termos, obtemos a relação

$$(-k+2j+1)\,b_{k-j,j}=\tilde{a}_{k-j,j}-\sum_{m=1}^{n}(k-2j)\,g_m\,b_{k-j-m,j-m}, \tag{24}$$

onde $\tilde{a}_{k-j,j}$ denota o coeficiente de $\xi^{k-j}\eta^j$ na reexpansão de $f_1\big(h(\xi,\eta)\big)$ em série de potências em (ξ,η), e

$$n=\min\{k-j,j\}.$$

Assim, para os valores de k tais que

$$-k+2j+1\neq 0,$$

temos

$$b_{k-j,j}=\frac{1}{-k+2j+1}\left(\tilde{a}_{k-j,j}-\sum_{m=1}^{n}(k-2j)\,g_m\,b_{k-j-m,j-m}\right). \tag{25}$$

Lembremos que, quando $k=2m+1$, temos

$$-k+2j+1=0 \quad\Longleftrightarrow\quad j=m.$$

Nesse caso,

$$k-2j=2(m-j)+1,$$

e, em particular, para $j=m$, obtemos

$$k-2m=1.$$

Substituindo $k=2m+1$ em (24), segue que

$$-2(m-j)\,b_{2m+1-j,j}=\tilde{a}_{2m+1-j,j}-\sum_{m=1}^{n}(2(m-j)+1)\,g_m\,b_{2m+1-j-m,j-m}.$$

Tomando $j=m$, obtemos

$$0=\tilde{a}_{m+1,m}-g_m b_{1,0}.$$

Como

$$b_{1,0} = 1,$$

segue que

$$g_m = \tilde{a}_{m+1,m}.$$

Nesse caso, escolhemos

$$b_{m+1,m} = 0.$$

Portanto, os coeficientes da conjugação formal e da forma normal satisfazem as relações recursivas

$$\begin{cases} g_m = \tilde{a}_{m+1,m}, \qquad b_{m+1,m} = 0, & \text{se } k = 2m+1 \text{ e } j = m, \\ b_{k-j,j} = \dfrac{\tilde{a}_{k-j,j}}{-k+2j+1} - \displaystyle\sum_{m=1}^{n} \frac{k-2j}{-k+2j+1}\, g_m\, b_{k-j-m,j-m}, & \text{caso contrário.} \end{cases} \tag{26}$$

Dessa forma, a construção acima determina unicamente um par formal (g, h) compatível com a reversibilidade e com a estrutura da equação homológica.

O próximo passo consiste em obter majorações para os coeficientes g_m e $b_{k-j,j}$. Da primeira equação em (26), obtemos

$$|g_m| \leq |\tilde{a}_{m+1,m}|,$$

e, portanto,

$$\widehat{g}(\xi\eta) := \sum_{m=1}^{\infty} |g_m|(\xi\eta)^m \leq \sum_{m=1}^{\infty} |\tilde{a}_{m+1,m}|(\xi\eta)^m \leq \sum_{k=2}^{\infty}\sum_{j=0}^{k} |\tilde{a}_{k-j,j}|\, \xi^{k-j}\eta^j =: \widehat{f}(\xi,\eta). \tag{27}$$

Note que $\widehat{f}$ é uma função analítica em uma vizinhança da origem, pois é obtida a partir da função

$$f(\xi,\eta) = \sum_{k=2}^{\infty}\sum_{j=0}^{k} \tilde{a}_{k-j,j}\, \xi^{k-j}\eta^j$$

substituindo-se cada coeficiente $\tilde{a}_{k-j,j}$ por seu valor absoluto.

Como f é analítica em torno da origem (por ser composição de f_1 com polinômios), segue que $\widehat{f}$ também é analítica em torno da origem.

Como $\widehat{g}$ é majorada por $\widehat{f}$, concluímos que $\widehat{g}$ é analítica em uma vizinhança de 0 e, consequentemente,

$$g(t) = \sum_{m\geq 1} g_m t^m$$

é analítica em uma vizinhança de 0.

Da segunda equação de (26), obtemos

$$|b_{k-j,j}| \leq \left|\frac{1}{-k+2j+1}\right| |\tilde{a}_{k-j,j}| + \sum_{m=1}^{n} \left|\frac{k-2j}{-k+2j+1}\right| |g_m|\, |b_{k-j-m,j-m}|. \tag{28}$$

Existe uma constante $c > 0$, independente de k e j, tal que

$$\left|\frac{1}{-k+2j+1}\right| < c$$

e

$$\left|\frac{k-2j}{-k+2j+1}\right| < c$$

para todos os índices relevantes. Logo,

$$|b_{k-j,j}| \leq c\,|\tilde{a}_{k-j,j}| + c\sum_{m=1}^{n} |g_m|\,|b_{k-j-m,j-m}|.$$

Daí obtemos

$$\begin{aligned}
\widehat{h}(\xi,\eta) &:= \sum_{k=2}^{\infty}\sum_{j=0}^{k} |b_{k-j,j}|\,\xi^{k-j}\eta^{j} \\
&\leq c\sum_{k=2}^{\infty}\sum_{j=0}^{k} |\tilde{a}_{k-j,j}|\,\xi^{k-j}\eta^{j} \\
&\quad + c\sum_{k=2}^{\infty}\sum_{j=0}^{k}\sum_{m=1}^{n} |g_m|\,|b_{k-j-m,j-m}|\,\xi^{k-j}\eta^{j} \\
&\leq c\,\widehat{f}(\xi,\eta) + c\,\widehat{g}(\xi\eta)\,\widehat{h}(\xi,\eta) \\
&\leq c\,\widehat{f}(\xi,\eta) + c\,\widehat{f}(\xi,\eta)\,\widehat{h}(\xi,\eta),
\end{aligned}$$

onde, na última desigualdade, usamos (27).

Assim,

$$\widehat{h}(\xi,\eta) \leq \frac{c\,\widehat{f}(\xi,\eta)}{1-c\,\widehat{f}(\xi,\eta)} =: F(\xi,\eta),$$

sempre que

$$c\,\widehat{f}(\xi,\eta) < 1.$$

A função F é analítica em uma vizinhança da origem, pois é a composição da função analítica

$$x \mapsto \frac{x}{1-x}, \qquad |x| < 1,$$

com $c\,\widehat{f}(\xi,\eta)$. Portanto, $\widehat{h}$ é analítica em uma vizinhança da origem. Como h_1 é majorada por $\widehat{h}$, segue que h_1 também é analítica em uma vizinhança da origem. Consequentemente,

$$h_2(\xi,\eta) = h_1(\eta,\xi)$$

também é analítica.

Concluímos, portanto, que a conjugação formal construída anteriormente possui raio de convergência positivo.

Assim, o difeomorfismo formal h define uma conjugação analítica local entre os sistemas (17) e (21). Consequentemente, o campo vetorial inicial é analiticamente conjugado ao sistema Hamiltoniano (22), o que conclui a demonstração do Lema 2. □

3.1.5 Conclusão da demonstração do Teorema 3

A demonstração divide-se naturalmente em dois casos, de acordo com o sinal de

$$\det DX(0,0),$$

conforme estabelecido no Lema 1.

(i) Caso centro.

Neste caso, a parte linear do campo possui autovalores puramente imaginários e, pelo Lema 1, a reversibilidade exclui a possibilidade de foco. Assim, a origem é um centro não degenerado.

Aplicando o Teorema 2, obtemos uma mudança de coordenadas analítica que transforma X em um campo Hamiltoniano

$$X_H(x,y) = \big(\partial_y H(x,y), -\partial_x H(x,y)\big),$$

cuja Hamiltoniana é da forma

$$H(x,y) = F(x^2+y^2),$$

onde F é uma função real-analítica dada por

$$F(t) = \frac{1}{2}\int_0^t G(s)\,ds, \qquad G(0) > 0.$$

(ii) Caso sela.

Neste caso, a parte linear do campo possui autovalores reais de sinais opostos, de modo que a origem é uma sela não degenerada.

Pelo Lema 2, existe uma mudança de coordenadas analítica que transforma X em um campo Hamiltoniano

$$X_H(x,y) = \big(\partial_y H(x,y), -\partial_x H(x,y)\big),$$

cuja Hamiltoniana é da forma

$$H(x,y) = F(y^2-x^2),$$

onde F é uma função real-analítica dada por

$$F(t) = \frac{1}{2}\int_0^t G(s)\,ds, \qquad G(0) < 0.$$

Em ambos os casos, a conjugação analítica pode ser escolhida de modo equivariante em relação à involução reversora

$$R(u,v) = (u,-v).$$

No caso sela, essa propriedade decorre diretamente da construção da forma normal reversível, produzindo um difeomorfismo analítico h satisfazendo

$$Dh(u,v)\,X(u,v) = X_H\big(h(u,v)\big), \qquad h\circ R = R\circ h.$$

No caso centro, a construção pode ser adaptada de maneira inteiramente análoga, produzindo novamente uma conjugação analítica equivariante.

Isso conclui a demonstração do Teorema 3.

3.2 Aplicação

Nesta seção apresentamos um exemplo que ilustra o Teorema 3. Trata-se de uma classe de sistemas reversíveis que não é Hamiltoniana na forma original, mas que pode ser transformada globalmente em um sistema Hamiltoniano por meio de uma mudança explícita de coordenadas.

Considere o sistema diferencial

$$\begin{cases} u' = v, \\ v' = -u(b - av^2), \end{cases} \qquad a, b > 0. \tag{29}$$

Na Seção 2.1, vimos que o sistema (29) é reversível em relação à involução

$$R(u, v) = (u, -v).$$

Além disso, o sistema não é Hamiltoniano na forma original, pois

$$\operatorname{div} X(u, v) = \frac{\partial}{\partial u}(v) + \frac{\partial}{\partial v}\big(-u(b - av^2)\big) = 2auv,$$

que não é identicamente nulo.

Considere agora a mudança de coordenadas

$$x = -\sqrt{ab}\, u, \qquad y = \tanh^{-1}\left(\sqrt{\frac{a}{b}}\, v\right).$$

Observemos que essa transformação comuta com a involução R, pois

$$x(u, -v) = x(u, v), \qquad y(u, -v) = -y(u, v).$$

Como

$$v = \sqrt{\frac{b}{a}} \tanh(y),$$

temos

$$x' = -\sqrt{ab}\, v = -b \tanh(y).$$

Por outro lado,

$$y' = \frac{\sqrt{a/b}}{1 - \frac{a}{b}v^2}\, v'.$$

Substituindo a segunda equação de (29), obtemos

$$y' = -\frac{\sqrt{a/b}}{1 - \frac{a}{b}v^2}\, u(b - av^2).$$

Como

$$b - av^2 = b\left(1 - \frac{a}{b}v^2\right),$$

segue que

$$y' = -\sqrt{ab}\, u = x.$$

Portanto, o sistema (29) transforma-se em

$$\begin{cases} x' = -b\tanh(y), \\ y' = x. \end{cases}$$

Esse sistema é Hamiltoniano, com Hamiltoniana

$$H(x,y) = -\frac{1}{2}x^2 - b\ln(\cosh y),$$

pois

$$x' = \frac{\partial H}{\partial y}, \qquad y' = -\frac{\partial H}{\partial x}.$$

Assim, obtivemos uma conjugação global entre o sistema reversível (29) e um sistema Hamiltoniano, preservando a involução reversora ao longo da transformação.

Esse exemplo mostra que, para certas classes especiais de sistemas reversíveis, a equivalência com sistemas Hamiltonianos pode ser obtida em contexto global, e não apenas local. Nesse sentido, o Teorema 3 pode ser visto como uma versão local de um fenômeno que, em situações particulares, também admite uma realização global.

4 Conclusão

Mostramos que todo campo vetorial analítico planar reversível em relação à involução

$$R(u,v) = (u,-v)$$

é localmente analiticamente conjugado a um campo Hamiltoniano cuja Hamiltoniana assume a forma normal clássica associada ao tipo do equilíbrio. Esse resultado estende, ao contexto analítico, a equivalência formal entre sistemas reversíveis e Hamiltonianos obtida em [11], mostrando que, no caso planar não degenerado, tal equivalência pode ser realizada por uma conjugação analítica local compatível com a involução reversora.

No caso centro, a equivalência pode ainda ser refinada. De fato, conforme mostrado em [25], o sistema é analiticamente conjugado a um Hamiltoniano do tipo potencial, fornecendo uma descrição mais precisa da dinâmica local.

O caso degenerado permanece em aberto e apresenta dificuldades substancialmente maiores. Os métodos utilizados neste trabalho dependem da não degenerescência da parte linear e da teoria clássica de formas normais analíticas. Em particular, singularidades nilpotentes ou altamente ressonantes podem introduzir obstruções à linearização e à própria existência de uma estrutura Hamiltoniana analítica equivalente.

A questão da equivalência global também permanece em aberto no caso geral, inclusive em dimensão 2. Entretanto, existem classes específicas nas quais a equivalência global pode ser obtida, como os sistemas Newtonianos reversíveis estudados em [26] e as normalizações globais para centros desenvolvidas em [27].

Outra direção natural para investigações futuras consiste em estudar a passagem da equivalência formal para a equivalência analítica em dimensões superiores. Nesse contexto, Lamb, Lima, Martins, Teixeira e Yang [12] mostraram que formas normais reversíveis em $\mathbb{R}^4$, na vizinhança de equilíbrios elípticos, possuem estrutura Hamiltoniana formal em diversos casos não ressonantes e ressonantes.

Assim, uma questão natural é determinar sob quais hipóteses essas equivalências formais podem ser promovidas a conjugações analíticas locais.

Os resultados obtidos neste trabalho mostram que, para equilíbrios não degenerados no plano, a equivalência entre sistemas reversíveis e Hamiltonianos ultrapassa o nível formal e pode ser realizada analiticamente. Isso sugere que fenômenos análogos possam ocorrer em contextos mais gerais, especialmente em dimensões superiores ou na presença de singularidades degeneradas, onde diversos problemas fundamentais permanecem em aberto.

Referências

[1] ARNOLD, V. I. Reversible systems. *In*: SAGDEEV, R. Z. (Ed.). **Nonlinear and Turbulent Processes in Physics**. Chur: Harwood, 1984. v. 3, p. 1161–1174.

[2] ARNOLD, V. I.; ILYASHENKO, Y. S. Ordinary differential equations. *In*: ANOSOV, D. V.; ARNOLD, V. I. (Ed.). **Dynamical Systems I**. [*S.l.*]: Springer-Verlag, 1988.

[3] DEVANEY, R. L. Reversible diffeomorphisms and flows. **Transactions of the American Mathematical Society**, v. 218, p. 89–113, 1976.

[4] LAMB, J. S. W.; ROBERTS, J. A. G. Time-reversal symmetry in dynamical systems: A survey. **Physica D: Nonlinear Phenomena**, v. 112, n. 1–2, p. 1–39, 1998.

[5] ARNOLD, V. I.; SEVRYUK, M. B. Oscillations and bifurcations in reversible systems. *In*: SAGDEEV, R. Z. (Ed.). **Nonlinear Phenomena in Plasma Physics and Hydrodynamics**. Moscow: Mir, 1986. p. 31–64.

[6] SEVRYUK, M. B. **Reversible Systems**. Berlin: Springer, 1986. v. 1211. (Lecture Notes in Mathematics, v. 1211).

[7] GOLUBITSKY, M. *et al.* The constrained liapunov–schmidt procedure and periodic orbits. **Fields Institute Communications**, v. 4, p. 81–127, 1995.

[8] GINÉ, J.; MAZA, S. The reversibility and the center problem. **Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications**, v. 74, n. 2, p. 695–704, 2011.

[9] ROBERTS, J. A. G.; QUISPEL, G. R. W. Chaos and time-reversal symmetry. order and chaos in reversible dynamical systems. **Physics Reports**, Elsevier, v. 216, n. 2-3, p. 63–177, 1992.

[10] MARTINS, R. M.; TEIXEIRA, M. A. On the similarity of hamiltonian and reversible vector fields in 4D. **Communications on Pure and Applied Analysis**, v. 10, n. 4, p. 1257–1266, 2011.

[11] MARTINS, R. M. Formal equivalence between normal forms of reversible and hamiltonian dynamical systems. **Communications on Pure and Applied Analysis**, v. 13, n. 2, p. 703–713, 2014.

[12] LAMB, J. S. W. *et al.* On the hamiltonian structure of normal forms at elliptic equilibria of reversible vector fields in $\mathbb{R}^4$. **Journal of Differential Equations**, v. 269, n. 12, p. 11366–11395, 2020.

[13] DUMORTIER, F.; LLIBRE, J.; ARTÉS, J. C. **Qualitative Theory of Planar Differential Systems**. Berlin: Springer, 2006. (Universitext).

[14] TEIXEIRA, M. A. Singularities of reversible vector fields. **Physica D: Nonlinear Phenomena**, v. 100, n. 1–2, p. 101–118, 1997.

[15] BUZZI, C. A.; TEIXEIRA, M. A. Time-reversible hamiltonian vector fields with symplectic symmetries. **Journal of Dynamics and Differential Equations**, v. 16, n. 2, p. 559–574, 2004.

[16] JARQUE, X.; LLIBRE, J. Structural stability of planar hamiltonian polynomial vector fields. **Proceedings of the London Mathematical Society**, v. 68, n. 3, p. 617–640, 1994.

[17] MELLO, L. F.; SANTOS, G. B. Uma bifurcação sela-centro em campos hamiltonianos planares. **Revista Brasileira de Ensino de Física**, v. 26, n. 4, p. 371–377, 2004.

[18] ARNOLD, V. I. **Geometrical Methods in the Theory of Ordinary Differential Equations**. New York: Springer, 2012.

[19] CHOW, S.-N.; LI, C.; WANG, D. **Normal Forms and Bifurcation of Planar Vector Fields**. Cambridge: Cambridge University Press, 1994.

[20] CHAVARRIGA, J.; SABATINI, M. A survey of isochronous centers. **Qualitative Theory of Dynamical Systems**, v. 1, p. 1–70, 1999.

[21] TEIXEIRA, M. A.; YANG, J. The center-focus problem and reversibility. **Journal of Differential Equations**, v. 174, n. 1, p. 237–251, 2001.

[22] GAETA, G. Normal forms of reversible dynamical systems. **International Journal of Theoretical Physics**, v. 33, p. 1917–1928, 1994.

[23] SIEGEL, C. L.; MOSER, J. K. **Lectures on Celestial Mechanics**. Berlin: Springer, 2012.

[24] BIBIKOV, Y. N. **Local Theory of Nonlinear Analytic Ordinary Differential Equations**. Berlin: Springer, 2006.

[25] NASCIMENTO, F. J. S. Conjugação analítica entre sistemas diferenciais planares e sistemas potenciais. **C.Q.D. –** Revista Eletrônica Paulista de Matemática, Bauru, p. e24015, 2024.

[26] NASCIMENTO, F. J. S. **Sistemas Newtonianos reversíveis bidimensionais.** 2023. Tese (Doutorado em Matemática Aplicada) — Instituto de Matemática e Estatística, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2023.

[27] GROTTA-RAGAZZO, C.; NASCIMENTO, F. J. S. Global normalizations for centers of planar vector fields. **Journal of Differential Equations**, v. 415, p. 701–721, 2025.